SESSION DE 1974

Concours B

ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Durée : 3 heures

N.B. *Lorsque l'énoncé du problème les y invitera, les candidats reporteront les résultats de leurs calculs dans des tableaux* $\mathcal{T}_1$ *et* $\mathcal{T}_2$ *dont un modèle est donné en fin de texte.*

La partie III (*sauf la question* 5°) *peut être traitée indépendamment des parties précédentes. Il en est de même de la partie* IV (*sauf la question* 4°).

I

Soit le polynôme de degré n :

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (1)$$

1° Combien faut-il d'additions et de multiplications pour obtenir la valeur de $P_n(x)$ en calculant successivement chaque terme du polynôme?

2° On considère la méthode itérative suivante :

$$b_0(x) = a_0 , \qquad (2.a)$$

$$b_p(x) = a_p + x b_{p-1}(x), \quad \text{pour } p = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2.b)$$

Montrer que $b_n(x) = P_n(x)$.

Quel est le nombre d'additions et de multiplications nécessaires au calcul de $P_n(x)$ à l'aide de la méthode (2)? Cette méthode est-elle plus avantageuse que le calcul direct de (1)?

3° Appliquer la méthode (2) au polynôme :

$$Q(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4, \qquad (3)$$

pour les valeurs suivantes de la variable :

$$x_i = ih , \qquad h = 10^{-1} , \qquad (4)$$

où i décrit l'ensemble $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Disposer les résultats dans le tableau $\mathcal{T}_1$.

II

On considère l'équation différentielle :

$$u'(x) = f(x, u(x)) , \qquad (5.a)$$

où la variable $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, l'inconnue est une fonction $u : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbf{R}$ et la fonction $f : \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est définie par :

$$f(x, y) = \frac{\cos^2 y}{Q(x)} . \qquad (5.b)$$

On associe à l'équation (5.a) la condition initiale :

$$u(0) = \frac{\pi}{4} . \qquad (5.c)$$

Après avoir représenté l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par l'ensemble $\{x_i , i \in I\}$ dont les éléments sont définis par (4), on introduit la méthode suivante qui permet de calculer des valeurs approchées u_i des valeurs exactes $u(x_i)$:

$$u_0 = \frac{\pi}{4} , \qquad (6.a)$$

$$u_{i+1} = u_i + h f(x_i, u_i) , \qquad i \in J, \qquad (6.b)$$

où $J = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

On appelle *erreur de méthode au point* x_i, le nombre :

$$e_i = u_i - u(x_i) , \qquad i \in I \qquad (7)$$

et *incertitude de méthode* un nombre positif majorant :

$$E = \max_{i \in I} |e_i| \ . \qquad (8)$$

1° Calculer, à la précision de la règle à calcul, les valeurs u_i, $i \in I$. On utilisera le tableau $\mathcal{T}_1$.

2° Représenter graphiquement, sur feuille de papier millimétré, la fonction continue $u_h : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbf{R}$ définie dans chaque intervalle $[x_i , x_{i+1}]$ par :

$$u_h(x) = u_i + (x - x_i) \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \ , \quad x \in [x_i , x_{i+1}], \ i \in J \ . \qquad (9)$$

On prendra 50 cm pour unité sur les deux axes.

III

1° Décomposer en éléments simples de première espèce la fraction rationnelle $\frac{1}{Q(x)}$.

2° Résoudre l'équation (5.*a*). Expliciter la solution u vérifiant la condition initiale (5.*c*).

3° Calculer, à moins de $0{,}5 \times 10^{-4}$ près, les valeurs $u(x_i)$, $i \in I$. Indiquer l'auteur de la table numérique de fonctions utilisée et disposer les résultats dans le tableau $\mathcal{T}_2$.

4° Représenter graphiquement la fonction u sur la feuille de papier millimétré utilisée en II.2° ci-dessus (même repère et mêmes échelles).

5° Calculer l'erreur de méthode aux points x_i, $i \in I$ et le nombre E (tableau $\mathcal{T}_2$).

IV

1° En utilisant les développements de Taylor suivants :

$$f(x_i , u_i) = f(x_i , u(x_i)) + [u_i - u(x_i)] \frac{\partial f}{\partial y}(x_i , \eta_i) \ , \qquad i \in J \ , \qquad (10)$$

où $$\eta_i \in \begin{cases} [u(x_i) , u_i] & \text{si} \quad u(x_i) \leqslant u_i \ , \\ [u_i , u(x_i)] & \text{si} \quad u_i < u(x_i) \ , \end{cases}$$

et :

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(\xi_i) \ , \qquad i \in J \ , \qquad (11)$$

où $\xi_i \in [x_i , x_{i+1}]$,

montrer que :

$$|e_{i+1}| \leqslant (1 + hM)|e_i| + h\varepsilon \ , \qquad i \in J \ , \qquad (12)$$

où M et ε désignent les nombres positifs :

$$M = \max_{i \in J} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_i , \eta_i) \right| \ , \qquad (13)$$

$$\varepsilon = \frac{h}{2} \max_{i \in J} \left| u''(\xi_i) \right| \ . \qquad (14)$$

2° En déduire la majoration suivante de l'erreur de méthode au point x_i :

$$|e_i| \leqslant \frac{\varepsilon}{M} [\exp(Mx_i) - 1] \ , \qquad i \in I \ . \qquad (15)$$

On pourra utiliser l'inégalité :

$$(1 + z)^\alpha \leqslant \exp(\alpha z), \qquad (16)$$

valable pour $1 + z \geqslant 0$ et $\alpha > 0$.

3° Montrer que M peut être majoré par :

$$\frac{1}{\left| Q\left(\frac{1}{2}\right) \right|}$$

et que ε peut être évalué à l'aide de la formule approchée :

$$\varepsilon \simeq \frac{1}{2} \max_{i \in J} | f(x_{i+1} , u_{i+1}) - f(x_i , u_i) | \ .$$

4° Donner une estimation de l'incertitude de méthode n'utilisant pas la connaissance des valeurs exactes $u(x_i)$.

Comment pourrait-on améliorer la précision de la méthode (6) ?

TABLEAU $\mathcal{C}_1$

$a_0 =$ $a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$ $h = 0,1$

i	x_i	$b_0(x_i)$	$b_1(x_i)$	$b_2(x_i)$	$Q(x_i)$	u_i	$\cos(u_i)$	$f(x_i, u_i)$
0								
1								
2								
3								
4								
5								

TABLEAU $\mathcal{C}_2$

i	x_i					$u(x_i)$	e_i
0							
1							
2							
3							
4							
5							

calculs intermédiaires E =

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail